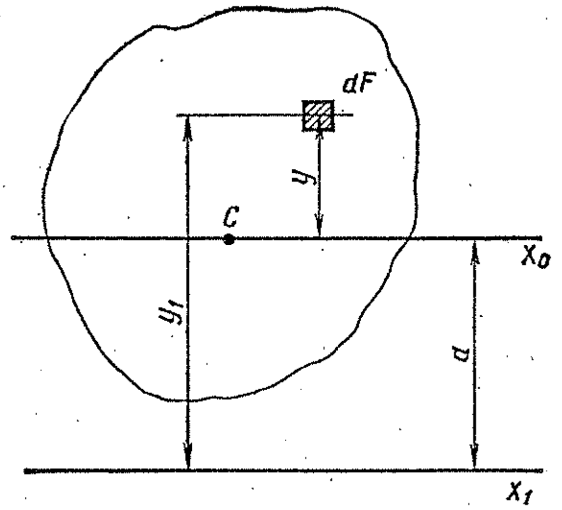
٢٨ – العلاقة بين عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور المتوازية

نحدد عزم القصور الذاتى للشكل، بالنسبة لمحور ما x_1 (الشكل ٤ – ٤). نفترض ان x_0 – المحور المركزى، وان عزم القصور الذاتى J_{x_0} معلوم. يتضح لنا من الشكل ان: $y_1 = a + y$. اذن:

$$J_{x_1} = \int_F (a+y)^2\, dF = a^2 \int_F dF + 2a \int_F y\,dF + \int_F y^2 dF.$$

ان التكامل الاول يعطينا مساحة المقطع.

والتكامل الثانى الذى يمثل العزم الاستاتيكى بالنسبة للمحور المركزى x_0 يساوى صفرا.



الشكل ٤ – ٤

اما التكامل الثالث فيمثل عزم القصور الذاتى J_{x_0} للشكل بالنسبة للمحور x_0. وعلى هذا الاساس فان

$$J_{x_1} = J_{x_0} + Fa^2. \qquad (٤ – ١٠)$$

ان عزم القصور الذاتى بالنسبة لأى محور يساوى عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور المركزى الموازى له، زائدا حاصل ضرب مساحة الشكل فى مربع المسافة بين المحورين.

ويتضح من الصيغة (٤ ــ ١٠)، بان عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور المركزى اقل عزم القصور الذاتى بالنسبة لاى محور غير مركزى مواز للاول.

ان عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور المركزى يسمى بعزم القصور الذاتى المركزى.

٢٩ ــ عزوم القصور الذاتى للمقاطع البسيطة

١ ــ المستطيل (الشكل ٤ ــ ٥، a). نحسب عزم القصور الذاتى للمقطع، بالنسبة للمحور x_0 المار بمركز الثقل.

وكجزء من المساحة dF نأخذ مساحة شريحة رقيقة للغاية $dF=bdy$، فعند ذلك:

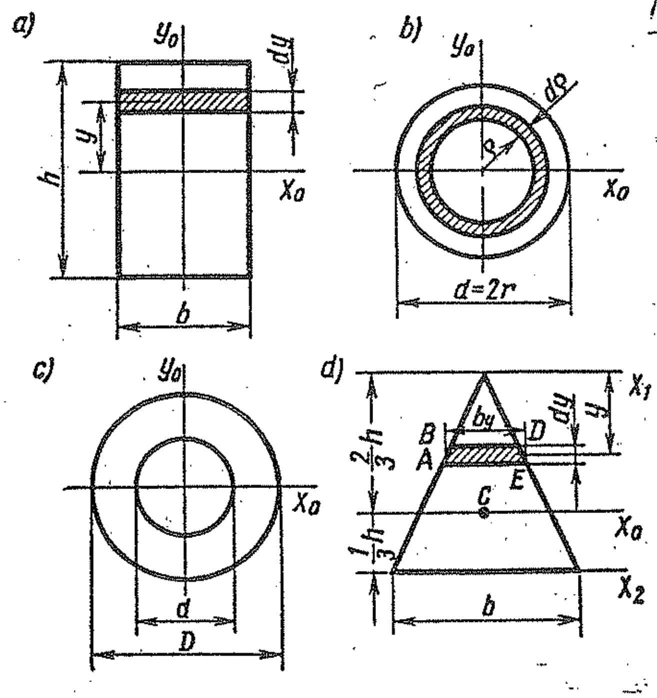
$\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3-\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{h^3}{8}+\frac{h^3}{8}\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{4} = \frac{h^3}{12}$

$$J_{x_0} = b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

bh

$\frac{mh^2}{12}$

$\frac{mb^2}{12}$



الشكل ٤ ــ ٥

وهكذا:

$$J_{x_0}=\frac{bh^3}{12}. \qquad (٤ - ١١)$$

ومن البديهى ان:

$$J_{y_0}=\frac{hb^3}{12}. \qquad (٤ - ١٢)$$

٢ ـ الدائرة (الشكل ٤ ـ ٥، b). نحدد اولا عزم القصور الذاتى القطبى بالنسبة لمركز الدائرة.

$$J_p=\int_F \rho^2 dF.$$

وكجزء من المساحة dF نأخذ مساحة حلقة رقيقة للغاية ذات سمك $d\rho$:

$$dF=2\pi\rho d\rho$$

فعند ذلك:

$$J_p=2\pi\int_0^r \rho^3 d\rho=\frac{\pi r^4}{2}.$$

اذن:

$$J_p=\frac{\pi r^4}{2}=\frac{\pi d^4}{32}\approx 0.1d^4. \qquad (٤ - ١٣)$$

ومن السهل الان ايجاد J_{x_0}. فللدائرة حسب الصيغة (٤ ـ ٩)، عندنا $J_p=2J_{x_0}=2J_{y_0}$، ومن هنا:

$$J_{x_0}=J_{y_0}=\frac{J_p}{2}=\frac{\pi r^4}{4}=\frac{\pi d^4}{64}\approx 0.05d^4. \qquad (٤ - ١٤)$$

٣ ـ الحلقة (الشكل ٤ ـ ٥، c). ان عزم القصور الذاتى المحورى فى هذه الحالة يساوى الفرق بين عزمى القصور الذاتى للدائرتين الداخلية والخارجية.

$$J_{x_0}=J_{y_0}=\frac{\pi D^4}{64}-\frac{\pi d^4}{64}=0.05\,D^4\,(1-c^4) \qquad (٤ - ١٥)$$

حيث:

$$c=\frac{d}{D}$$

وبالمثل، فان عزم القصور الذاتى القطبى يساوى:

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = 0.1 D^4 (1 - c^4) \qquad (٤ - ١٦)$$

٤ ـ المثلث (الشكل ٤ ـ ٥، d). نحدد عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور x_1 الموازى للقاعدة والمار برأس المثلث:

$$J_{x_1} = \int_F y^2 dF.$$

وكجزء من المساحة dF نأخذ مساحة شبه منحرف رقيق للغاية ABDE، يمكن اعتبار مساحته مساوية لمساحة المستطيل:

$$dF = b_y dy$$

حيث b_y ـ طول المستطيل. ومن تشابه المثلثات من السهل الحصول على:

$$b_y = \frac{y}{h} b$$

~~فعند~~ ذلك:

$$J_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4}. \qquad (٤ - ١٧)$$

اننا نحدد عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور المركزى، باستعمال الصيغة (٤ ـ ١٠)

$$J_{x_0} = J_{x_1} - Fa^2 = \frac{bh^3}{4} - \frac{bh}{2}\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \qquad (٤ - ١٨)$$

ونحدد عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور المار بالقاعدة:

$$J_{x_2} = J_{x_0} + Fa^2 = \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2}\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{bh^3}{12}. \qquad (٤ - ١٩)$$

٣٠ ـ عزم القصور الذاتى للاشكال المركبة

ان عزم القصور الذاتى للشكل المركب، يساوى مجموع عزوم القصور الذاتى لاجزائه المنفردة:

$$J_x = J_x^{\mathrm{I}} + J_x^{\mathrm{II}} + J_x^{\mathrm{III}} + \dots \qquad (٤ - ٢٠)$$

وهذا يستنتج مباشرة من خصائص التكامل المحدود

$$\int_{F} y^2 dF = \int_{F_1} y^2 dF + \int_{F_2} y^2 dF + \dots$$

حيث:

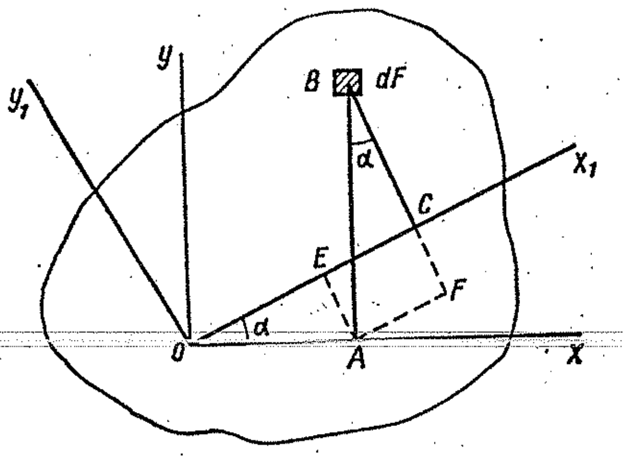
$$F = F_1 + F_2 + \dots$$

وعلى هذا الاساس ، فلحساب عزم القصور الذاتي للشكل المركب، يجب تقسيمه الى عدة اشكال بسيطة، وبحساب عزوم القصور الذاتي لهذه الاشكال وجمعها نحصل على العزم المطلوب.

ان النظرية المذكورة تنطبق ايضا بالنسبة لعزم القصور الذاتي الطارد المركزي. ان عزوم القصور الذاتي للمقاطع المدلفنة (مقطع شكل I، مقطع على شكل مجرى (ب)، الزوايا، الخ) مبينة في جداول خاصة.

٣١ — تغير عزوم القصور الذاتي عند دوران المحاور

نجد العلاقة بين عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين x و y وبين عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحورين x_1، y_1، والتي دارت بزاوية α (الشكل ٤ — ٦). نفترض بان $J_x > J_y$ وان الزاوية α موجبة، اذا دارت من المحور x عكس اتجاه دوران عقرب الساعة.



الشكل ٤ — ٦

لحل هذه المسألة الموضوعة، نجد العلاقة بين احداثيات المساحة dF فى حالة المحاور الاولى والثانية. ونستنتج من الشكل، ان:

$$x_1 = \overline{OC} = \overline{OE} + \overline{EC} = \overline{OE} + \overline{AF} = \overline{OA}\cos\alpha + AB\sin\alpha =$$
$$= x\cos\alpha + y\sin\alpha \qquad (٤-٢١)$$

$$y_1 = \overline{BC} = \overline{BF} - \overline{AE} = y\cos\alpha - x\sin\alpha. \qquad (٤-٢٢)$$

نحدد الان عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحورين x_1 و y_1:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dF =$$
$$= \int_F y^2\cos^2\alpha dF - 2\int_F xy\sin\alpha\cos\alpha dF + \int_F x^2\sin^2\alpha dF$$

او:

$$J_{x_1} = J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - 2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (٤-٢٣)$$

وبنفس الطريقة:

$$J_{y_1} = \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2 dF =$$
$$= J_x\sin^2\alpha + J_y\cos^2\alpha + 2J_{xy}\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (٤-٢٤)$$

$$J_{x_1y_1} = \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) dF =$$
$$= \frac{J_x\sin 2\alpha}{2} - \frac{J_y\sin 2\alpha}{2} + J_{xy}\cos 2\alpha. \qquad (٤-٢٥)$$

وبجمع الصيغتين (٤ — ٢٣) و (٤ — ٢٤)، نحصل على:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p. \qquad (٤-٢٦)$$

وبطرح الصيغة (٤ — ٢٤) من الصيغة (٤ — ٢٣)، نحصل على:

$$J_{x_1} - J_{y_1} = (J_x - J_y)\cos 2\alpha - 2J_{xy}\sin 2\alpha. \qquad (٤-٢٧)$$

ويتبين من الصيغة (٤ — ٢٦)، ان مجموع عزمى القصور الذاتى بالنسبة لمحورين متعامدين لا يتغير عند دوران المحاور.

والصيغة (٤ — ٢٧) يمكن ان تستخدم لحساب عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالنسبة للمحورين x و y، وذلك بواسطة عزم القصور الذاتى المحورى المعروف بالنسبة للمحاور x، y و x_1، y_1.

٣٢ — محاور القصور الذاتي الرئيسية وعزوم القصور الذاتي الرئيسية

عند تغير الزاوية α، فان مقادير J_{x_1}، J_{y_1}، $J_{x_1y_1}$ تتغير. ونوجد قيمة الزاوية التي تكون فيها لكل من J_{x_1} و J_{y_1} قيم عظمى او صغرى، بأخذ المشتقة الاولى من J_{x_1} او J_{y_1} بالنسبة للزاوية α وجعلها تساوي صفرا:

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} = -2J_x \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2J_y \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - 2J_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

او:

$$(J_y - J_x)\sin 2\alpha_0 - 2J_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

ومن هنا:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \qquad (٤ — ٢٨)$$

ان هذه الصيغة تحدد وضع محورين، يكون عزم القصور الذاتي بالنسبة لاحدهما نهاية عظمى وبالنسبة للاخر نهاية صغرى.

ان مثل هذه المحاور تسمى بالمحاور الرئيسية. وعزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور الرئيسية تسمى بعزوم القصور الذاتي الرئيسية.

ومن الصيغ (٤ — ٢٣) و (٤ — ٢٤)، نحصل على مقدار عزوم القصور الذاتي الرئيسية، وذلك بعد تعويض قيمة α_0 من الصيغة (٤ — ٢٨)، واستعمال المتطابقات المثلثية المعروفة لدوال الزوايا المزدوجة (راجع البند ١٩).

وبعد التحويل نحصل على الصيغة التالية لتحديد عزوم القصور الذاتي الرئيسية:

$$J_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \qquad (٤ — ٢٩)$$

ان هذه الصيغة تشبه بتركيبها الصيغة (٢ — ٣٦) للاجهادات الرئيسية.

وعند بحث المشتقة الثانية $\frac{d^2Jx_1}{d\alpha^2}$ يمكن في هذه الحالة ($J_x > J_y$) اثبات ان عزم القصور الذاتي الاكبر $J_{\max}$ يكون بالنسبة للمحور الرئيسي، الذي

دار بالنسبة للمحور x بزاوية α_0. اما العزم الاصغر للقصور الذاتي، فانه يكون بالنسبة للمحور الاخر العمودي على الاول.

وفي اغلب الحالات لا نحتاج لمثل هذا البحث، وذلك لان تكوين المقطع يوضح لنا ايّا من المحاور الرئيسية يناظر العزم الاكبر للقصور الذاتي. وعدا الصيغة (٤ ــ ٢٩) لتحديد عزوم القصوز الذاتي الرئيسية، يمكن استعمال الصيغ (٤ ــ ٢٣) و (٤ ــ ٢٤) ايضا. وهنا تحل المسألة نفسها ذاتيا: بالنسبة لاى محور رئيسي نحصل على العزم الاكبر للقصور الذاتي وبالنسبة لاى محور نحصل على العزم الاصغر.

ولنبين الان، ان عزم القصور الذاتي الطارد المركزي بالنسبة للمحاور الرئيسية يساوى صفرا.

وبالفعل، فبمساواة $J_{x_1y_1}$ للصفر حسب الصيغة (٤ ــ ٢٥)، فاننا نحصل على:

$$\frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha_0 + J_{xy}\cos 2\alpha_0 = 0$$

ومنها نحصل من جديد على الصيغة (٤ ــ ٢٨) لـ $\tan 2\alpha_0$.

وعلى هذا الاساس، فان محاور القصور الذاتي هي المحاور التي تملك الخصائص التالية:

١ ــ ان عزم القصور الذاتي الطارد المركزي بالنسبة لهذه المحاور يساوى صفرا.

٢ ــ ان عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور الرئيسية هي اما نهاية عظمى او نهاية صغرى.

ان المحاور الرئيسية التي تمر بمركز ثقل المقاطع، تسمى بمحاور القصور الذاتي المركزية الرئيسية.

وفي حالات كثيرة، يمكن تحديد وضع المحاور المركزية الرئيسية فورا، واذا كان للشكل محور تماثل، فانه يعتبر احد المحاور المركزية الرئيسية، اما المحور الثاني، فيمر بمركز ثقل المقطع بصورة عمودية على المحور

الاول. ويستخلص مما ذكر اعلاه، ان عزم القصور الذاتى الطارد المركزى يساوى صفرا، اذا اخذ بالنسبة لمحور التماثل او اى محور اخر عمودى عليه.

وباستعمال الصيغ (٤ — ٢٣) و (٤ — ٢٥)، يمكن التأكد من انه اذا كان عزما القصور الذاتى المركزيان الرئيسيان للمقطع متساويين، فان اى محور مركزى فى هذا المقطع يعتبر رئيسيا وكل عزوم القصور الذاتى المركزية الرئيسية تكون متساوية (الدائرة، المربع، الشكل السداسى والمثلث المتساوى الاضلاع).

وبالفعل، نفترض انه فى مقطع ما كان المحوران x و y محورين مركزيين رئيسيين، وان $J_x = J_y$. فعند ذلك نحصل من الصيغ (٤ — ٢٣) و (٤ — ٢٤) على $J_x = J_y = J_{x_1} = J_{y_1}$، ومن الصيغة (٤ — ٢٥) نتأكد من ان $J_{x_1 y_1} = 0$، اى ان كلا من المحورين x_1 و y_1 يعتبر محور قصور ذاتى مركزى رئيسى لمثل هذا الشكل.

٣٣ — العلاقة بين عزوم القصور الذاتى الطاردة المركزية بالنسبة لمجموعتين متوازيتين من محاور الاحداثيات

نفترض ان $x_0 y_0$ هما محوران مركزيان (الشكل ٤ — ٧) وعزم القصور الذاتى $J_{x_0 y_0}$ معلوم. نجد عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالنسبة للمحورين $x_1 y_1$. ومن الشكل يتضح ان :

$$x_1 = x_0 + b,$$
$$y_1 = y_0 + a$$

اذن:

$$J_{x_1} J_{y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x_0 + b)(y_0 + a)\, dF =$$

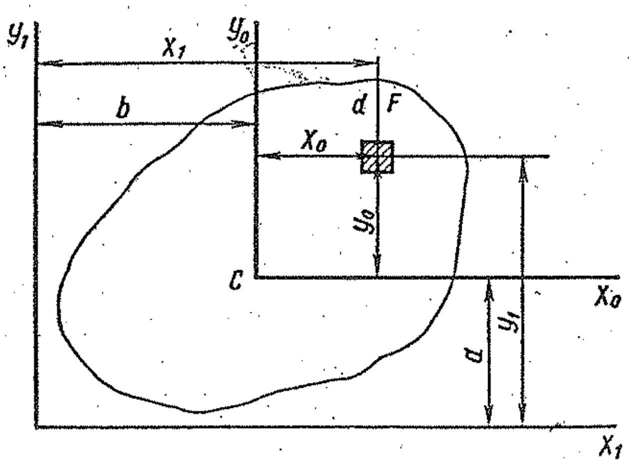
$$= \int_F x_0 y_0 dF + b \underbrace{\int_F y_0 dF}_{0} + a \underbrace{\int_F x_0 dF}_{0} + \int_F ab dF$$

او :

$$J_{x_1 y_1} = J_{x_0 y_0} + Fab . \qquad (٤ — ٣٠)$$

ان التكاملين الثانى والثالث فى الطرف الايمن من المعادلة (٤ — ٣٠) اللذين يمثلان العزوم الاستاتيكية بالنسبة للمحاور المركزية، يساويان صفرا.

وهكذا، فان عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالنسبة لمجموعة المحاور المتعامدة والموازية للمحاور المركزية يساوى عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالنسبة لهذه المحاور المركزية زائدا حاصل ضرب مساحة الشكل فى



الشكل ٤ — ٧

احداثيات مركز ثقلها بالنسبة للمحاور الجديدة.

واذا كانت المحاور y_0، x_0 تعتبر محاور رئيسية مركزية، فان $J_{x_0y_0} = 0$ بالنسبة الى هذه المحاور وان الصيغة (٤ — ٣٠) تتبسط :

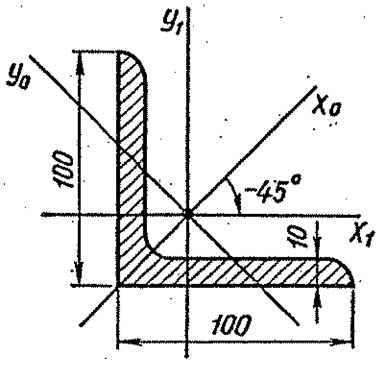
$$J_{x_1y_1} = Fab. \qquad (٤ — ٣١)$$

وللشكل المركب الذى يتكون من n من الاشكال البسيطة:

$$J_{x_1y_1} = \sum_1^n F_i a_i b_i \qquad (٤ — ٣٢)$$

(على شرط، ان تعتبر المحاور المركزية الخاصة لكل شكل محاور رئيسية).

مثال ٤ — ٢. يراد حساب عزم القصور الذاتى الطارد المركزى لمقطع زاوى ابعاده ١٠ × ١٠٠ × ١٠٠ مم بالنسبة للمحاور المركزية y_1، x_1 (الشكل ٤ — ٨).



الشكل ٤ — ٨

الحل. نستعمل الصيغة (٤ — ٢٥) ونحدد عزم القصور الذاتى المركزى بواسطة عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور المركزية x_0، y_0 المعروفة لدينا من الجداول:

$$J_{x_0} = 284 \text{ cm}^4 ,$$

$$J_{y_0} = 74.1 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_1y_1} = \frac{(J_{x_0} - J_{y_0}) \sin 2\alpha}{2} + J_{x_0y_0} \cos 2\alpha.$$

وبما ان مجموعة المحورين x_0، y_0 تعتبر محاور مركزية رئيسية (المحور x_0 — محور تماثل للشكل)، فان عزم القصور الذاتى $J_{x_0y_0}$ يساوى صفرا، والزاوية $\alpha = 45°$ ذلك لان المحورين y_1 و x_1 اللذين يحسب عزم القصور الذاتى المركزى بالنسبة لهما، دارا باتجاه دوران عقرب الساعة بالنسبة للمحورين x_0، y_0.

اذن:

$$J_{x_1y_1} = \frac{284 - 74.1}{2} (-1) = - 104.95 \ cm^4 .$$

مثال ٤ — ٣. يراد حساب عزوم القصور الذاتى المركزية الرئيسية للمقطع المرسوم فى الشكل ٤ — ٩.

الحل. ١ — نحدد احداثيات مركز الثقل، حيث نمد محاور ثانوية x_1 و y_1، ونقسم المقطع الى قسمين: قسم على هيئة مجرى (I) وقسم كمقطع زاوى (II)، وجميع المعطيات الضرورية موجودة فى جداول المقاطع الجانبية (الجدول ٤ — ١).

ونحدد احداثيات مركز الثقل للمقطع بالصيغ:

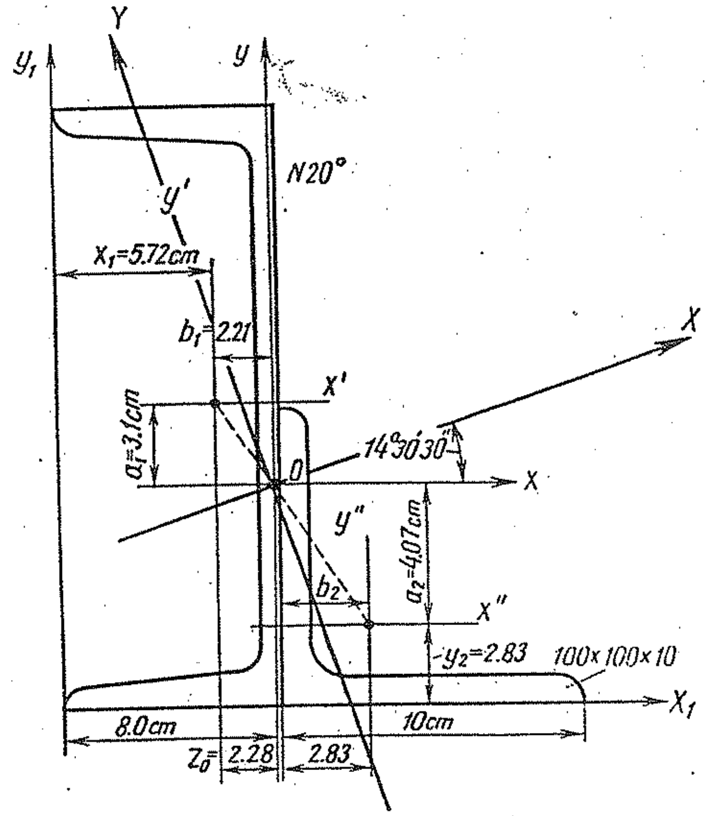
$$x_0 = \frac{F_1a_1 + F_2x_2}{F_1 + F_2} ,$$

$$y_0 = \frac{F_1y_1 + F_2y_2}{F_1 + F_2}$$

حيث F_1 — مساحة الشكل الاول (المجرى)،

x_1 — المسافة بين المحور y_1 وبين مركز ثقل المجرى.

وهنا : $x_1=8.0-2.28=5.72$ cm ، حيث 8.0 cm ـ سمك المجرى
و $z_0=2.28$ cm ـ المسافة بين مركز ثقل المجرى وبين الجدار.
F_2 ـ مساحة المقطع الزاوى ،
x_2 ـ المسافة بين مركز ثقل المقطع الزاوى وبين المحور y_1 ، وتساوى
$x_2=8.0+2.83=10.83$cm.



الشكل ٤ ـ ٩

ان المسافة بين المحور x_1 ومركز ثقل المجرى تساوى $y_1=10$cm ، وذلك لان ارتفاع المجرى ٢٠ سم ، ولان المسافة بين المحور x_1 وبين مركز ثقل المقطع الزاوى تساوى $y_2=2.83$ cm . وبالتعويض بالقيم العددية نحصل على:

$$x_0=\frac{25.2\cdot5.72\cdot19.2\cdot10.83}{25.2+19.2}=7.93\text{ cm}$$

$$y_0=\frac{25.2\cdot10+19.2\cdot2.83}{25.2+19.2}=6.9\text{ cm.}$$

الجدول ٤-١

الشكل	مساحة المقطع F, cm²	موضع مركز الثقل z_0, cm	عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحاور المركزية الذاتية، cm⁴	
			الافقية	الرأسية
مقطع على شكل مجرى رقم ٢٠ a	٢٥٫٢	٢٫٢٨	١٦٧٠	١٣٩
مقطع زاوى ابعاده ١٠٠ × ١٠٠ × ١٠	١٩٫٢	٢٫٨٣	١٧٩	١٧٩

وبهذه المعطيات نعين النقطة O التى هى مركز ثقل المقطع، ونقوم برسم محاور مركزية ثانوية x و y. ويجب ان تكون النقطة O واقعة على الخط الواصل بين مركزى ثقل المجرى والمقطع الزاوى.

٢ ــ نحسب عزوم القصور الذاتى بالنسبة للمحورين x و y.

$$J_x = J_x^{I} + J_x^{II},$$
$$J_y = J_y^{I} + J_y^{II}.$$

ولحساب عزم القصور الذاتى للمجرى J_x^I بالنسبة للمحور x، نستعمل الصيغة (٤ ــ ١٠):

$$J_x^I = 1670 + 25.2\,(+3.10)^2 = 1912 \text{ cm}^4$$

حيث $J_x^I =$ ١٦٧٠ سم⁴ ــ عزم القصور الذاتى للمجرى بالنسبة لمحورها المركزى الذاتى x،

$F =$ ٢٥٫٢ سم² ــ مساحة مقطع المجرى.

$a_1 =$ ١٠ ــ ٦٫٩٠ = ٣٫١ سم ــ المسافة بين المحور x وبين مركز ثقل المجرى، ويؤخذ موجبا، وذلك لان مركز ثقل المجرى اعلى من المحور x.

وبنفس الطريقة، فان عزم القصور الذاتى للمقطع الزاوى بالنسبة للمحور x

$$J_x^{II} = 179 + 19.2\,(-4.07)^2 = 497 \text{ cm}^4,$$

حيث J_x^{II} = ١٧٩ سم٤ هى عزم القصور الذاتى للمقطع الزاوى بالنسبة للمحور المركزى الذاتى x'' .

a_2 = ٢٫٨٣ — ٦٫٩٠ = — ٤٫٠٧ سم هى المسافة بين المحور x وبين مركز ثقل المقطع الزاوى. تكون الاشارة سالبة لان مركز ثقل للقطع الزاوى يقع اسفل المحور x .

وعزم القصور الذاتى الكلى للمقطع بالنسبة للمحور x يساوى:

$$J_x = 1912 + 497 = 2409 \text{ cm}^4.$$

وبنفس الطريقة بالضبط نحسب عزم القصور الذاتى للمقطع بالنسبة للمحور y .

عزم القصور الذاتى للمجرى سيكون:

$$J_y^{I} = 139 + 25.2\,(-2.21)^2 = 262.5 \text{ cm}^4$$

حيث b_1 = ٥٫٧٢ — ٧٫٩٣ = — ٢٫٢١ سم هى المسافة بين المحور y وبين مركز ثقل المجرى. ان الاشارة السالبة توضع ، لان مركز ثقل المجرى يقع على يسار المحور y .

للمقطع الزاوى:

$$J_y^{II} = 179 + 19.2\,(2.9)^2 = 340.5 \text{ cm}^4$$

حيث b_2 = ٨+٢٫٨٣ — ٧٫٩٣ = ٢٫٩٠ سم هى المسافة بين المحور y وبين مركز ثقل المقطع الزاوى.

وعزم القصور الذاتى الكلى للمقطع بالنسبة للمحور y يساوى:

$$J_y = 262.5 + 340.5 = 603 \text{ cm}^4.$$

لنحسب عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالنسبة للمحورين x و y . لاجل هذا تستعمل الصيغة (٤ — ٣٠). وبما ان المجرى له محور تماثل افقى x'، فان المحاور المركزية الذاتية للمجرى x' و y' تعتبر محاور رئيسية، لذلك فان الحد الاول فى الصيغة (٤ — ٣٠) للمجرى يساوى صفرا.

وبالنسبة للمقطع الزاوى، فان المحاور المركزية الذاتية تكون موازية للمحورين x و y اى ان x' و y' لا تعتبران محورين رئيسيين. لذلك فان الحد الاول من الصيغة (٤ — ٣٠) لا يساوى صفرا بالنسبة للمقطع الزاوى. ويجب حسابه بنفس الطريقة التى اتبعت فى المثال ٤ — ٢. حيث حصلنا هناك على قيمة عزم القصور الذاتى الطارد المركزى لنفس المقطع الزاوى بالنسبة للمحورين x' و y'، والذى يساوى $J_{x'y'}$. اذن فان عزم القصور الذاتى الطارد المركزى لكل المقطع سيساوى:

$$J_{xy} = 25.2\,(+3.10)\,(-2.21) - 104.95 +$$
$$+ 19.2\,(-4.07)\,(2.9) = -172.0 - 104.95 - 225 = -501.9\ \text{cm}^4\,.$$

٣ — نحدد وضع المحاور المركزية الرئيسية بواسطة الصيغة (٤ — ٢٨):

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2\,(-501.95)}{603 - 2409} = 0.555\,;$$

$$2\alpha_0 = 29°03',\quad \alpha_0 = 14°31'30''$$

نقيم هذه الزاوية عكس اتجاه دوران عقرب الساعة ونرسم المحورين المركزيين X و Y . فاذا حصلنا على $\tan 2\alpha_0$ و α_0 باشارة سالبة، فان المحاور الرئيسية فى هذه الحالة تكون بالنسبة للمحورين x و y موضوعة فى اتجاه دوران عقرب الساعة.

٤ — نحسب عزوم القصور الذاتى المركزية الرئيسية بواسطة الصيغة (٤ — ٢٩):

$$J_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{2409 + 603}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2409 - 603)^2 + 4 \times 501.95^2} =$$
$$= 1506 \pm 1030.$$

اذن $J_{\max} = 2536\ cm^4$ ، $J_{\min} = 476\ cm^4$

وبما ان $J_x > J_y$ ، فان $J_{\max}$ ستكون بالنسبة للمحور الرئيسى X و $J_{\min}$ بالنسبة للمحور الرئيسى Y .

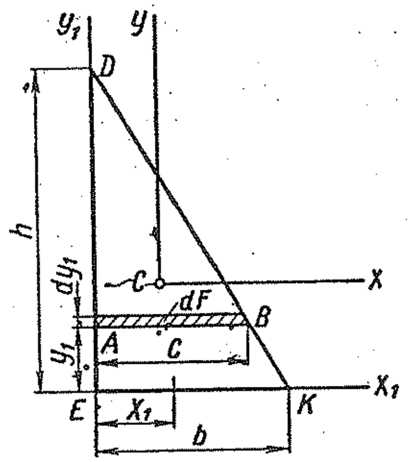
وبغية التأكد من صحة ذلك، تستعمل الصغية (٤ — ٢٣) و (٤ — ٢٤):

$$J_x = 2409\times0.937 + 603\times0.0625 + $$
$$+ 501.95\times0.485 = 2536 \text{ cm}^4$$
$$J_y = 2409\times0.0625 + 603\times0.937 - 501.95\times0.485 = 476 \text{ cm}^4$$

حيث:

$$\cos^2\alpha = \cos^2(14°31'30'') = 0.968^2 = 0.937,$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2(14°31'30'') = 0.25^2 = 0.0625;$$
$$\sin 2\alpha = \sin 29°03' = 0.485.$$

مثال ٤ — ٤. يراد تحديد عزم القصور الذاتى الطارد المركزى لمثلث قائم الزاوية بالنسبة للمحورين المنطبقين على ضلعيه القائمين (الشكل ٤ — ١٠).



الشكل ٤ — ١٠

الحل. يحسب عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالصيغة:

$$J_{x_1y_1} = \int_F x_1y_1dF.$$

وكجزء من المساحة (مساحة اولية) نعتبر مساحة الشريحة AB .

$$dF = cdy_1$$

أن الاحداثى الافقى x_1 لمركز ثقل الشريحة AB يساوى:

$$x_1 = \frac{c}{2}.$$

ولكن من شروط تشابه المثلثين DEK و DAB نحصل على:

$$c = \frac{b}{h}(h - y_1).$$

وعلى هذا الاساس فان:

$$J_{x_1y_1} = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h - y_1)^2\, y_1 dy_1 = \frac{b^2h^2}{24}\,.$$

ولتحديد عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالنسبة للمحاور المركزية نستعمل الصيغة (٤ — ٣٠).

$$J_{xy} = J_{x_1y_1} - F\,\frac{h}{3}\,\frac{b}{3} = -\frac{b^2h^2}{72}\,.$$